Vraag	Antwoord	Scores

Het achtste deel

1 maximumscore 4

- $A(p)=\int_{-9}^{p}\sqrt{x+9}\,\mathrm{d}x$ 1
- Een primitieve van $\sqrt{x+9}$ is $\frac{2}{3}(x+9)^{\frac{3}{2}}$ 2
- $A(p)=\frac{2}{3}(p+9)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}(-9+9)^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}(p+9)^{\frac{3}{2}}$ 1

of

- $A(p)=\int_{-9}^{p}\sqrt{x+9}\,\mathrm{d}x$ 1
- De afgeleide van $\frac{2}{3}(p+9)^{\frac{3}{2}}$ is gelijk aan $\sqrt{p+9}$ 2
- $A(p)=\frac{2}{3}(p+9)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}(-9+9)^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}(p+9)^{\frac{3}{2}}$ 1

2 maximumscore 5

- De oppervlakte van het gebied ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de y-as is ($A(0)=\frac{2}{3}(0+9)^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\cdot 27=$) 18 1
- Voor p moet gelden: $A(p)=\frac{18}{8}$ 1
- $\frac{2}{3}(p+9)^{\frac{3}{2}}=\frac{18}{8}$ 1
- $p+9=\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$ 1
- Het antwoord: $p=-\frac{27}{4}$ (of $p=-6\frac{3}{4}$) 1

Vraag	Antwoord	Scores

3 **maximumscore 6**

- Een vergelijking voor het spiegelbeeld van de grafiek van f is $y = \sqrt{-x+9}$ — 1
- $g(x) = \sqrt{-x}$ — 1
- De grafieken van f en g snijden elkaar voor $x = -4\frac{1}{2}$ — 1
- De inhoud is $\pi \cdot \int_{-4\frac{1}{2}}^{0} (x+9--x)\,\mathrm{d}x$ — 1
- Een primitieve van $2x+9$ is x^2+9x — 1
- Invullen van de grenzen geeft $20\frac{1}{4}\pi$ — 1

of

- De grafieken van f en g snijden elkaar voor $x = -4\frac{1}{2}$ — 1
- De grafieken van f en g zijn symmetrisch ten opzichte van de lijn met vergelijking $x = -4\frac{1}{2}$ — 1
- De inhoud van het omwentelingslichaam is gelijk aan $\pi \cdot \int_{-4\frac{1}{2}}^{0} (f(x))^2\,\mathrm{d}x - \pi \cdot \int_{-9}^{-4\frac{1}{2}} (f(x))^2\,\mathrm{d}x$ — 2
- Een primitieve van $(f(x))^2$ is $\frac{1}{2}x^2+9x$ — 1
- Invullen van de grenzen geeft $20\frac{1}{4}\pi$ — 1

Lemniscaat

4 maximumscore 4

- Er moet gelden $\sin t \cdot \cos t = \frac{1}{4}$ — 1
- ($2\sin t \cdot \cos t = \frac{1}{2}$ geeft) $\sin(2t) = \frac{1}{2}$ — 1
- Op het interval $[0,\ 2\pi\rangle$ zijn de oplossingen $t = \frac{1}{12}\pi$, $t = \frac{5}{12}\pi$, $t = \frac{13}{12}\pi$ en $t = \frac{17}{12}\pi$ — 2

5 maximumscore 7

- In de oorsprong geldt $\cos t = 0$ — 1
- $t = \frac{1}{2}\pi$ of $t = \frac{3}{2}\pi$ — 1
- $x'(t) = -\sin t$ — 1
- $y'(t) = \cos^2 t - \sin^2 t$ (of $y'(t) = \cos(2t)$) — 1
- Op $t = \frac{1}{2}\pi$ is de richtingsvector van de raaklijn $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ — 1
- Op $t = \frac{3}{2}\pi$ is de richtingsvector van de raaklijn $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ — 1
- Een redenering of berekening waaruit volgt dat de hoek tussen deze vectoren 90° (of $\frac{1}{2}\pi$(rad)) is — 1

Opmerking
Als bij de laatste twee scorepunten symmetrie wordt gebruikt zonder dat deze is aangetoond, hiervoor 2 scorepunten in mindering brengen.

Twee punten

6 maximumscore 6

- De x-coördinaat van P is 0; de y-coördinaat noemen we p — 1
- $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 2 \\ p-3 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} -6 \\ p-7 \end{pmatrix}$ — 2
- $\begin{pmatrix} 2 \\ p-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ p-7 \end{pmatrix} = 0$ — 1
- De vergelijking $-12 + (p-3)(p-7) = 0$ geeft $p = 1$ of $p = 9$ (dus $P(0, 9)$ en $Q(0, 1)$) — 2

of

- Volgens de stelling van Thales liggen P en Q op de cirkel met middellijn AB — 1
- $AB = \sqrt{80}$ $(= 2\sqrt{20})$ en het midden van AB heeft coördinaten $(2, 5)$ (dus de punten P en Q liggen op de cirkel met middelpunt $(2, 5)$ en straal $\frac{1}{2}\sqrt{80}$ $(= \sqrt{20})$ — 2
- Een vergelijking van de cirkel is $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 20$ — 1
- Voor het snijpunt met de y-as geldt $x = 0$, dus $4 + (y-5)^2 = 20$ — 1
- Dit geeft $y = 1$ of $y = 9$ (dus $P(0, 9)$ en $Q(0, 1)$) — 1

of

- De x-coördinaat van P is 0; de y-coördinaat noemen we p — 1
- $AB^2 = ((7-3)^2 + (6--2)^2) = 80$ — 1
- $AP^2 = (3-p)^2 + (-2)^2$ — 1
- $BP^2 = (7-p)^2 + 6^2$ — 1
- (Pythagoras in driehoek ABP geeft) $p^2 - 10p + 9 = 0$ — 1
- Dit geeft $p = 1$ of $p = 9$ (dus $P(0, 9)$ en $Q(0, 1)$) — 1

7 maximumscore 6

- Een richtingsvector van lijn AB is $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (of: de richtingscoëfficiënt van lijn AB is $\frac{1}{2}$) — 1
- Een toelichting of berekening waaruit volgt dat de loodlijn op AB door M lijn AB in het midden van RS snijdt in het punt $T(-4, 2)$ — 2
- De afstand van M tot lijn AB is $\sqrt{5}$ — 1
- $MT^2 + TS^2 = MS^2$, dus $(\sqrt{5})^2 + (3\sqrt{5})^2 = MS^2$ — 1
- $MS^2 = 50$, dus de straal is $\sqrt{50}$ $(= 5\sqrt{2})$ — 1

of

Vraag	Antwoord	Scores

- Een vergelijking van de lijn door A en B is $y = \frac{1}{2}x + 4$ 1
- Substitutie in de vergelijking van de cirkel geeft:
  $(x+3)^2 + (\frac{1}{2}x+4)^2 = r^2$ 1
- $x = -4 + \frac{2}{5}\sqrt{5r^2 - 25}$ of $x = -4 - \frac{2}{5}\sqrt{5r^2 - 25}$ 1
- $R(-4 - \frac{2}{5}\sqrt{5r^2 - 25},\ 2 - \frac{1}{5}\sqrt{5r^2 - 25})$ en
  $S(-4 + \frac{2}{5}\sqrt{5r^2 - 25},\ 2 + \frac{1}{5}\sqrt{5r^2 - 25})$ 1
- $RS^2 = (\frac{4}{5}\sqrt{5r^2 - 25})^2 + (\frac{2}{5}\sqrt{5r^2 - 25})^2 = 4r^2 - 20$ 1
- ($4r^2 - 20 = 180$ dus) $r = 5\sqrt{2}$ 1

Stuiterende bal

8 maximumscore 3

- (Uit $h_7 = h_0 \cdot a^7 = \frac{1}{5} h_0$ volgt) $a^7 = \frac{1}{5}$ 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost 1
- $a = 0,79$ 1

9 maximumscore 5

- $2 \cdot \sqrt{\dfrac{h_1}{4,9}} = 1,11$ geeft $h_1 \approx 1,509$ (of nauwkeuriger) 1
- $2 \cdot \sqrt{\dfrac{h_4}{4,9}} = 0,68$ geeft $h_4 \approx 0,566$ (of nauwkeuriger) 1
- (h_n neemt exponentieel af met factor a dus) $a^3 \approx \dfrac{0,566}{1,509}$ 1
- $a \approx 0,721$ (of nauwkeuriger) 1
- $h_0 = \dfrac{h_1}{a} \approx \dfrac{1,509}{0,721} \approx 2,1$ (meter) (of 21 decimeter) 1

Opmerking
Als wordt gerekend met 2 decimalen in plaats van 3 decimalen achter de komma, hiervoor geen scorepunten in mindering brengen.

Over de muur

10 maximumscore 2

- $x_P = -4\cos\alpha$ 1
- $y_P = 2 + 4\sin\alpha$ 1

11 maximumscore 5

- $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -10t + 20\cos\alpha\sqrt{\sin\alpha}$ 1
- In het hoogste punt geldt $t = 2\cos\alpha\sqrt{\sin\alpha}$ 1
- $y_{\text{top}} = -5(2\cos\alpha\sqrt{\sin\alpha})^2 + 2 + 4\sin\alpha + 20\cdot 2(\cos\alpha\sqrt{\sin\alpha})^2$ 1
- $y_{\text{top}} = 2 + 20\sin\alpha\cos^2\alpha + 4\sin\alpha$ 1
- $y_{\text{top}} = 2 + 20\sin\alpha\left(1-\sin^2\alpha\right) + 4\sin\alpha = 2 + 24\sin\alpha - 20\sin^3\alpha$ 1

of

- In het hoogste punt geldt $t = -\frac{b}{2a} = -\frac{20\cos\alpha\cdot\sqrt{\sin\alpha}}{-10} = 2\cos\alpha\cdot\sqrt{\sin\alpha}$ 2
- $y_{\text{top}} = -5(2\cos\alpha\cdot\sqrt{\sin\alpha})^2 + 2 + 4\sin\alpha + 20\cdot 2(\cos\alpha\cdot\sqrt{\sin\alpha})^2$ 1
- $y_{\text{top}} = 2 + 20\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha + 4\sin\alpha$ 1
- $y_{\text{top}} = 2 + 20\sin\alpha\cdot\left(1-\sin^2\alpha\right) + 4\sin\alpha = 2 + 24\sin\alpha - 20\sin^3\alpha$ 1

12 maximumscore 4

- Beschrijven hoe de waarde van α kan worden gevonden waarvoor y_{top} maximaal is 1
- $\alpha \approx 0{,}685$ (of nauwkeuriger) 1
- $\sin\alpha \approx 0{,}632$ (of nauwkeuriger) en $\cos\alpha \approx 0{,}774$ (of nauwkeuriger) (of $\cos\alpha \approx 0{,}775$ of nauwkeuriger) 1
- Dus bij benadering geldt:
  $y(t) = -5t^2 + 2 + 4\cdot 0{,}632 + 20t\cdot 0{,}774\cdot\sqrt{0{,}633} = -5t^2 + 12{,}3t + 4{,}5$ 1

13 maximumscore 5

- De vergelijking $-5t^2 + 12{,}3t + 4{,}5 = 6$ moet worden opgelost 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost 1
- $t \approx 2{,}33$ (of nauwkeuriger) ($t \approx 0{,}13$ voldoet niet) 1
- $x(2{,}33) \approx 20{,}4$ (of nauwkeuriger) 1
- Het antwoord: 4 (m) 1

Door de asymptoot

14 maximumscore 4

- Voor een formule van g geldt $x = \ln\left(\dfrac{2y-1}{y+2}\right)$ 1
- Dit geeft $\dfrac{2y-1}{y+2} = \mathrm{e}^x$ 1
- Herleiden tot $2y - y \cdot \mathrm{e}^x = 1 + 2\mathrm{e}^x$ 1
- Dit geeft $y(2-\mathrm{e}^x) = 1 + 2\mathrm{e}^x$, dus $y = \dfrac{1+2\mathrm{e}^x}{2-\mathrm{e}^x}$ (dus g is de inverse van f) 1

of

- Er moet gelden $g(f(x)) = x$ (voor elke x uit het domein) 1
- $g(f(x)) = \dfrac{1 + 2 \cdot \dfrac{2x-1}{x+2}}{2 - \dfrac{2x-1}{x+2}}$ 1
- (Teller en noemer met $x+2$ vermenigvuldigen geeft) $\dfrac{(x+2) + 2 \cdot (2x-1)}{2 \cdot (x+2) - (2x-1)}$ 1
- Dit vereenvoudigen tot $\dfrac{5x}{5} = x$ (dus g is de inverse van f) 1

Vraag	Antwoord	Scores

15 maximumscore 5

- $\dfrac{2x-1}{x+2}=\dfrac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}$ dus de horizontale asymptoot is de lijn met vergelijking $y=\ln 2$
  (of: een redenering waaruit blijkt dat de horizontale asymptoot de lijn met vergelijking $y=\ln 2$ is) 1
- $\left|\ln\left(\dfrac{2x-1}{x+2}\right)\right|=\ln 2$ geeft $\ln\left(\dfrac{2x-1}{x+2}\right)=\ln 2$ of $\ln\left(\dfrac{2x-1}{x+2}\right)=-\ln 2$ 1
- Dit geeft $\dfrac{2x-1}{x+2}=2$ of $\dfrac{2x-1}{x+2}=\frac{1}{2}$ 1
- Een berekening waaruit volgt dat $x=\frac{4}{3}$ 2

of

- $2-\mathrm{e}^x=0$ als $x=\ln 2$, dus de lijn met vergelijking $x=\ln 2$ is de verticale asymptoot van de grafiek van *g*. De horizontale asymptoot van de grafiek van *f* heeft dus vergelijking $y=\ln 2$. 1
- $\left|\ln\left(\dfrac{2x-1}{x+2}\right)\right|=\ln 2$ geeft $\ln\left(\dfrac{2x-1}{x+2}\right)=\ln 2$ of $\ln\left(\dfrac{2x-1}{x+2}\right)=-\ln 2$ 1
- Dit geeft $\dfrac{2x-1}{x+2}=2$ of $\dfrac{2x-1}{x+2}=\frac{1}{2}$ 1
- Een berekening waaruit volgt dat $x=\frac{4}{3}$ 2

Parabool en cirkel

16 maximumscore 4

- Punt P heeft coördinaten $(p, \frac{1}{8}p^2 + 2)$ 1
- (De stelling van Pythagoras toepassen geeft)
  $FP = \sqrt{p^2 + (\frac{1}{8}p^2 + 2 - 4)^2} = \sqrt{p^2 + (\frac{1}{8}p^2 - 2)^2}$ 1
- $FP = \sqrt{\frac{1}{64}p^4 + \frac{1}{2}p^2 + 4}$ 1
- $FP = \sqrt{(\frac{1}{8}p^2 + 2)^2} = \frac{1}{8}p^2 + 2$ 1

17 maximumscore 4

- Een vergelijking van de middelloodlijn m is $y = \frac{1}{16}p^2 + 1$ 1
- De afstand van F tot m is $4 - \left(\frac{1}{16}p^2 + 1\right) = 3 - \frac{1}{16}p^2$ 1
- Deze afstand is gelijk aan FP als $\frac{1}{8}p^2 + 2 = 3 - \frac{1}{16}p^2$ 1
- Dit geeft $\frac{3}{16}p^2 = 1$, dus (wegens $p > 0$) $p = \sqrt{\frac{16}{3}}$ (of een gelijkwaardige vorm) 1

of

- Een vergelijking van c is $x^2 + (y - 4)^2 = \left(\frac{1}{8}p^2 + 2\right)^2$ 1
- $(0, \frac{1}{16}p^2 + 1)$ ligt op c 1
- Invullen geeft $\left(\frac{1}{16}p^2 - 3\right)^2 = \left(\frac{1}{8}p^2 + 2\right)^2$ 1
- Dit geeft $\frac{3}{16}p^2 = 1$, dus (wegens $p > 0$) $p = \sqrt{\frac{16}{3}}$ (of een gelijkwaardige vorm) 1